ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.927.2

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© М.В. Борзова, Т.Ю. Тишкина

Аннотация. Рассмотрена двухточечная краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Получены условия однозначной разрешимости. Предложен алгоритм нахождения решения, использующий представление общего решения. В этом представлении для нахождения фундаментальной системы решений однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения использован метод Эйлера. Приведен иллюстративный пример.
Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение второго порядка; краевая задача; приближенное решение; метод Эйлера

ВВЕДЕНИЕ

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка широко используются в физике для описания различных процессов, например, многочисленных колебательных систем (см., например, [1]). Причем достаточно часто для описания физических процессов приходится использовать краевые (граничные), а не начальные условия. В связи с тем, что уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в общем виде не интегрируются в квадратурах, актуальным является вопрос о приближенном решении таких уравнений и соответствующих краевых задач. Приближенные методы решения краевых задач для уравнений первого порядка рассматривались в [2, гл. 9].

§1. Условия разрешимости краевой задачи

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x''(t) - p(t)x'(t) - q(t)x(t) = f(t),\ t\epsilon[0;T], \qquad (1)$$

где $f, p, q: [0; T] \to R$ – известные суммируемые функции. Краевой задачей для уравнения (1) называют задачу нахождения решения этого уравнения, которое удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} a_{11}x(0) + a_{12}x(T) = b_1, \\ a_{12}x(0) + a_{22}x(T) = b_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $a_{i,j}, b_i$ – заданные числа, $i = 1,2$, $j = 1,2$.

Для нахождения решения краевой задачи (1), (2) наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$x''(t) - p(t)x'(t) - q(t)x(t) = 0,\ t\epsilon[0; T]. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (1) задается формулой

$$x(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \tilde{x}(t), \tag{4}$$

в которой (X_1, X_2) – фундаментальная система решений уравнения (3), $\tilde{x}$ – частное решение уравнения (1), c_1, c_2 − произвольные числа.

Теорема 1. *Краевая задача* (1), (2) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда справедливо следующее соотношение:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}X_1(0) + a_{12}X_1(T) & a_{11}X_2(0) + a_{12}X_2(T) \\ a_{21}X_1(0) + a_{22}X_1(T) & a_{21}X_2(0) + a_{22}X_2(T) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (4) общего решения уравнения (1). Подставим функцию x в краевые условия (2) и найдем числа c_1, c_2. Если эти числа будут единственными, то и решение краевой задачи (1), (2) также единственно.

Имеем следующую систему для нахождения чисел c_1, c_2:

$$\begin{cases} a_{11}\big(c_1X_1(0) + c_2X_2(0) + \tilde{x}(0)\big) + a_{12}\big(c_1X_1(T) + c_2X_2(T) + \tilde{x}(T)\big) = b_1, \\ a_{21}\big(c_1X_1(0) + c_2X_2(0) + \tilde{x}(0)\big) + a_{22}\big(c_1X_1(T) + c_2X_2(T) + \tilde{x}(T)\big) = b_2. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} c_1\big(a_{11}X_1(0) + a_{12}X_1(T)\big) + c_2\big(a_{11}X_2(0) + a_{12}X_2(T)\big) = \tilde{b}_1, \\ c_1\big(a_{21}X_1(0) + a_{22}X_1(T)\big) + c_2\big(a_{21}X_2(0) + a_{22}X_2(T)\big) = \tilde{b}_2, \end{cases} \tag{6}$$

здесь правая часть определяется формулами

$$\tilde{b}_1 = b_1 - a_{11}\tilde{x}(0) - a_{12}\tilde{x}(T), \tilde{b}_2 = b_2 - a_{21}\tilde{x}(0) - a_{22}\tilde{x}(T).$$

Остается заметить, что система (6) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от 0, то есть при выполнении соотношения (4).

Теорема доказана.

Следствие 1. *При выполнении соотношения* (5) *решение краевой задачи* (1), (2) *определяется формулой* (4), *в которой коэффициенты равны*

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{7}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}X_1(0) + a_{12}X_1(T) & a_{11}X_2(0) + a_{12}X_2(T) \\ a_{21}X_1(0) + a_{22}X_1(T) & a_{21}X_2(0) + a_{22}X_2(T) \end{vmatrix},$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 - a_{11}\tilde{x}(0) - a_{12}\tilde{x}(T) & a_{11}X_2(0) + a_{12}X_2(T) \\ b_2 - a_{21}\tilde{x}(0) - a_{22}\tilde{x}(T) & a_{21}X_2(0) + a_{22}X_2(T) \end{vmatrix},$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}X_1(0) + a_{12}X_1(T) & b_1 - a_{11}\tilde{x}(0) - a_{12}\tilde{x}(T) \\ a_{21}X_1(0) + a_{22}X_1(T) & b_2 - a_{21}\tilde{x}(0) - a_{22}\tilde{x}(T) \end{vmatrix}.$$

Доказательство очевидно: в формулу (5) следует подставить числа C_1, C_2, которые определяются как решения системы (6), то есть по формуле (7).

§2. Алгоритм приближенного решения краевой задачи

Как показано в предыдущем параграфе, для нахождения решения краевой задачи (1), (2) необходимо вначале определить функции $X_1(t), X_2(t), \tilde{x}(t)$ – конкретные решения дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Однако для конкретных дифференциальных уравнений в явном виде найти решения удается не всегда. Поэтому для решения краевых задач можно пользоваться приближенными методами нахождения этих функций.

В работе предлагается следующий алгоритм решения краевых задач.

1. Определяем фундаментальную систему решений $(X_1(t), X_2(t))$ однородного уравнения (3). А именно $X_1(t)$ – решение задачи Коши для уравнения (3) с начальными условиями $X_1(0) = 1, X_1{}'(0) = 0$; а $X_2(t)$ –

решение задачи Коши для уравнения (3) с начальными условиями $X_2(0) = 0, X_2{}'(0) = 1$. Для нахождения этих решений $X_1(t), X_2(t)$ можно воспользоваться любым численым методом, например, методом Эйлера.

2. Определим частное решение $\tilde{x}(t)$ уравнения (1), как решение задачи Коши с начальными условиями $x(0) = 0, x'(0) = 0$. Для его нахождения также можно воспользоваться любым численным методом, например, методом Эйлера. А можно использовать представление $\tilde{x}(t)$ уравнения через функцию Коши $K(t,s)$ уравнения (1):

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t K(t,s)\, f(s) ds. \tag{8}$$

В этом представлении функция Коши $K(t,s)$ вычисляется через фундаментальную систему решений однородного уравнения (3):

$$K(t,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} X_1(s) & X_2(s) \\ X_1(t) & X_2(t) \end{vmatrix},$$

где $W(s) = \begin{vmatrix} X_1(s) & X_2(s) \\ X'_1(s) & X'_2(s) \end{vmatrix}$ – определитель Вронского.

3. Находим числа c_1, c_2 по формуле (7). В этой формуле, учитывая, что $X_1(0) = 1$, $X_2(0) = 0$ и $\tilde{x}(0) = 0$, имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12}X_1(T) & a_{12}X_2(T) \\ a_{21} + a_{22}X_1(T) & a_{22}X_2(T) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 - a_{12}\tilde{x}(T) & a_{12}X_2(T) \\ b_2 - a_{22}\tilde{x}(T) & a_{22}X_2(T) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12}X_1(T) & b_1 - a_{12}\tilde{x}(T) \\ a_{21} + a_{22}X_1(T) & b_2 - a_{22}\tilde{x}(T) \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$c_1 = \frac{(b_1 - a_{12}\tilde{x}(T))a_{22}X_2(T) - (b_2 - a_{22}\tilde{x}(T))a_{12}X_2(T)}{\big(a_{11} + a_{12}X_1(T)\big)a_{22}X_2(T) - \big(a_{21} + a_{22}X_1(T)\big)a_{12}X_2(T)},$$

$$c_2 = \frac{\big(a_{11} + a_{12}X_1(T)\big)\big(b_2 - a_{22}\tilde{x}(T)\big) - \big(a_{21} + a_{22}X_1(T)\big)\big(b_1 - a_{12}\tilde{x}(T)\big)}{\big(a_{11} + a_{12}X_1(T)\big)a_{22}X_2(T) - \big(a_{21} + a_{22}X_1(T)\big)a_{12}X_2(T)}.$$

4. Находим решение краевой задачи (1), (2) по формуле (4), таким образом, получаем:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \frac{(b_1 - a_{12}\tilde{x}(T))a_{22}X_2(T) - (b_2 - a_{22}\tilde{x}(T))a_{12}X_2(T)}{\big(a_{11} + a_{12}X_1(T)\big)a_{22}X_2(T) - \big(a_{21} + a_{22}X_1(T)\big)a_{12}X_2(T)} X_1(t) +$$
$$+ \frac{\big(a_{11} + a_{12}X_1(T)\big)\big(b_2 - a_{22}\tilde{x}(T)\big) - \big(a_{21} + a_{22}X_1(T)\big)\big(b_1 - a_{12}\tilde{x}(T)\big)}{\big(a_{11} + a_{12}X_1(T)\big)a_{22}X_2(T) - \big(a_{21} + a_{22}X_1(T)\big)a_{12}X_2(T)} X_2(t).$$

Чтобы воспользоваться полученной формулой для решения краевой задачи (1), (2), необходимо определить функции $X_1(t), X_2(t), \tilde{x}(t)$. Как отмечалось, можно определить эти функции приближенно, используя, например, метод Эйлера.

Напомним расчетные формулы метода Эйлера решения дифференциального уравнение первого порядка

$$x' = f(t, x), t \in [0, T], \tag{9}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0.$$

Разделим интервал $[0, T]$ на равные отрезки длины h (величину h называют шагом интегрирования) точками:

$$t_0 = 0,\ t_1 = t_0 + h,\ t_2 = t_1 + h,\ \dots,\ t_n = t_{n-1} + h = T.$$

Формулу

$$x_i = x_{i-1} + hf(t_i, x_i),\ \ i=0,\ 1,\ 2, \dots n. \tag{10}$$

называют методом Эйлера численного решения уравнения (9).

Для решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots x_p), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_p' = f_p(t, x_1, \dots x_p), \end{cases} \quad x_1(t_0) = x_{10}, \dots, x_p(t_0) = x_{p0}, \tag{11}$$

формулу Эйлера на каждом шаге интегрирования применяют для каждого из уравнений, то есть

$$
\begin{gathered}
x_{1i+1} = x_{1i} + hf_1(t_i, x_{1i}, x_{2i} \dots x_{pi}), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\
x_{pi+1} = x_{pi} + hf_p(t_i, x_{1i}, x_{2i} \dots x_{pi}).
\end{gathered} \tag{12}
$$

§3. Нахождение фундаментальной системы решений линейного дифференциального уравнения второго порядка

Для применения формул (12) к нахождению фундаментальной системы однородного уравнения (3) перепишем это уравнение в виде системы

$$
\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = p(t)u + q(t)x. \end{cases} \tag{13}
$$

Итак, применим к системе (13) метод Эйлера. Вначале для нахождения X_1 следует принять $X_1(0) = 1,\ U_1(0) = 0$. Тогда $X_1(t_i)$ будут вычисляться по формулам:

$$
\begin{cases} x_{1i+1} = x_{1i} + u_{1i} \\ u_{1i+1} = u_{1i} + (p(t_i)u_i + q(t_i)x_i). \end{cases}
$$

В частности, на первом шаге получим

$$
\begin{cases} x_{11} = 1, \\ u_{11} = q(0). \end{cases}
$$

По аналогичным формулам определяется X_2:

$$
\begin{cases} x_{2i+1} = x_{2i} + u_{1i} \\ u_{2i+1} = u_{2i} + (p(t_i)u_i + q(t_i)x_i), \end{cases}
$$

только начальные условия следует принять $X_2(0) = 0, U_1(0) = 1$.

В частности, на первом шаге получим

$$
\begin{cases} x_{21} = h, \\ u_{11} = 1 + hp(0). \end{cases}
$$

§4. Нахождение фундаментальной системы решений конкретных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим, например, уравнение

$$x'' - (t^2 - 1)x = f(x), t \epsilon [0,1] \tag{14}$$

(подробнее об этом уравнении см. [2, с. 369, уравнение 2.15].

Запишем систему, равносильную однородному уравнению (14)

$$\begin{cases} x' = u \\ u' = (t^2 - 1)x. \end{cases}$$

Формула метода Эйлера здесь принимает вид

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + hu_i \\ u_{i+1} = u_i + h\left(t_i^2 - 1\right)x_i. \end{cases}$$

Применим эту формулу для нахождения фундаментальной системы решений однородного уравнения

$$x'' - (t^2 - 1)x = 0, t \epsilon [0,1]. \tag{15}$$

Пусть $h = 0{,}100$. Вначале находим X_1. Полагаем $x_0 = 1$, $u_0 = 0$, тогда имеем $x_1 = 1 + 0{,}1 \cdot 0 = 1, u_1 = 0 + 0{,}1(0^2 - 1) \cdot 1 = -0{,}1$ и т. д.

Сведем вычисленные значения в следующую табл. 1.

Таблица 1

t_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$X_1(t_i)$	1	1	0,99	0,970	0,941	0,903	0,857	0,804	0,746	0,684	0,619

Теперь находим X_2. Полагаем $x_0 = 0$, $u_0 = 1$, тогда $x_1 = 0 + 0{,}1 \times \times 1 = 0{,}1, u_1 = 1 + 0{,}1(0^2 - 1) \cdot 0 = 1$ и т. д. Сведем вычисленные значения в следующую табл. 2.

Таблица 2

t_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$X_2(t_i)$	0	0,1	0,2	0,299	0,396	0,490	0,581	0,668	0,752	0,832	0,910

§5. Краевая задача для уравнения $x'' - (t^2 - 1)x = f(x)$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (14) с условиями

$$\begin{aligned} x(1) - x(0) = 0,\\ x(1) + x(0) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Проверим условие (5) однозначной разрешимости этой задачи. Вычислим

$$\begin{vmatrix} X_1(1) - X_1(0) & X_2(1) - X_2(0) \\ X_1(1) + X_1(0) & X_2(1) + X_1(0) \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{vmatrix} 0{,}619 - 1 & 0{,}910 - 0 \\ 0{,}619 + 1 & 0{,}910 + 0 \end{vmatrix} = -0{,}381 \cdot 0{,}910 - 0{,}910 \cdot 1{,}619 = -1{,}82.$$

Таким образом, этот определитель отличен от нуля, и задача (14), (15) однозначно разрешима.

Для нахождения решения рассматриваемой краевой задачи определим частное решение уравнения (15) по формуле (8). Для этого составим таблицу значений функций $K(t_i, s_i)$. Обозначим

$$k_{ij} = K(t_i, s_j), j \le j, i, j = \overline{0{,}10.}$$

И вычислим эти значения. Результаты приведены в следующей табл. 3.

Таким образом, найдены фундаментальные решения однородного уравнения (15) и частное решение уравнения (14). Остается воспользоваться формулой, полученной в п. 4 § 2. Для рассматриваемой здесь краевой задачи эта формула принимает вид

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \frac{\big(-1 + X_1(1)\big)\big(-\tilde{x}(1)\big) - \big(1 + X_1(1)\big)\big(-\tilde{x}(1)\big)}{\big(-1 + X_1(1)\big)X_2(1) - \big(1 + X_1(1)\big)X_2(1)} X_2(t),$$

где значения $X_1(t), X_2(t)$ представлены в табл. 1–2, а значения функции $\tilde{x}(t)$ определяются как

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t K(t,s)\, f(s) ds.$$

Значения функции $K(t,s)$ представлены в табл. 3.

Таблица 3

t\s	**0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0	0										
0,1	0,10	0									
0,2	0,20	0,10	0								
0,3	0,299	0,20	0,10	0							
0,4	0,396	0,296	0,20	0,10	0						
0,5	0,490	0,396	0,298	0,199	0,10	0					
0,6	0,581	0,490	0,396	0,298	0,199	0,10	0				
0,7	0,668	0,582	0,491	0,396	0,299	0,199	0,10	0			
0,8	0,752	0,671	0,584	0,492	0,396	0,299	0,20	0,10	0		
0,9	0,832	0,756	0,673	0,585	0,493	0,397	0,299	0,199	0,1	0	
1	0,910	0,840	0,763	0,671	0,588	0,494	0,396	0,299	02	0,1	0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в данной работе методы приближенного нахождения решения краевых задач для линейного дифференциального уравнения второго порядка востребованы в различных моделях физических, технологических, биологических и других процессов. Кроме задачи нахождения решения предложенный метод можно использовать для качественного анализа, например, для выяснения разрешимости краевых задач.

Список литературы

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ (госзадание № 3.8515.2017/7.8).

Поступила в редакцию 09.04.2019 г.
Отрецензирована 25.04.2019 г.
Принята в печать 14.05.2019 г.

Информация об авторах:
Борзова Марина Васильевна – инженер научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: bmv_1603@mail.ru
Тишкина Татьяна Юрьевна – магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: tanechka_tishkina@mail.ru

ON CERTAIN METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

Borzova M.V., Engineer of the Scientific and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: bmv_1603@mail.ru
Tishkina T.Y., Master’s Degree Student in “Mathematics” Programme. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: tanechka_tishkina@mail.ru

Abstract. We consider a two-point boundary value problem for linear differential equation of second order with variable coefficients. We obtain conditions for unique solvability. We propose an algorithm for finding a solution that uses the general solution representation. In this representation, the Euler method was used to find the fundamental system of solutions of a homogeneous equation and a particular solution of a non-homogeneous equation. We give an illustrative example.

Keywords: linear differential equation of second order; boundary value problem; approximate solution; Euler method

ACKNOWLEDGEMENTS: The study is funded by Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 3.8515.2017/7.8).

Received 9 April 2019
Reviewed 25 April 2019
Accepted for press 14 May 2019